TD n°2 : Applications linéaires

Exercice 1. Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Soit f l'application définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y+z, x-y+z) \end{array}$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de f.
2. Mêmes questions avec :

(a) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & (x, 2x, 3x) \end{array}$ (b) $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-3y+2z \end{array}$

Exercice 2. Automorphisme de $\mathbb{R}^2$

Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que $M^2 = 3M - 3I_2$.
4. En déduire sans calcul que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 3. Automorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ (pour $n \geqslant 4$) et f, g les applications définies par :

$$\forall P \in E, \ f(P) = P - P' \quad \text{et} \quad g(P) = P + P' + P'' + \cdots + P^{(n)}$$

1. Vérifier que f et g sont des endomorphismes de E.
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
   En déduire que f est bijective et trouver f^{-1}.
3. Soit $Q : x \mapsto 3x^2 + x - 6$.
   Déterminer l'unique polynôme P de E tel que $f(P) = Q$.

Exercice 4. Automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'application S qui associe à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice : $S(M) = JMJ$.

1. Montrer que S est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Déterminer $S \circ S$. En déduire que S est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quel est l'automorphisme réciproque ?
2. Déterminer la matrice de S dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On notera A cette matrice.
3. On considère les éléments :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que (I, J, K, L) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la matrice de S dans la base (I, J, K, L). On notera D cette matrice.
5. Quel est le lien entre les matrices A et D ?

Exercice 5. Matrices dans différentes bases

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$Q : x \mapsto x \qquad ; \qquad R : x \mapsto x^2 + 1 \qquad ; \qquad S : x \mapsto x^2 - 1$$

   Montrer que (Q, R, S) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice M' de f dans cette base.
3. Quel est le lien entre les matrices M et M' ?

Exercice 6. Puissance de matrices

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ de base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On appelle f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image du vecteur $u = e_1 + e_2 + 2e_3$ par l'application f. Que peut-on dire du vecteur u pour l'application f ?
2. On pose $v = 3e_2 + 2e_3$ et $\mathcal{B}' = (u, v, e_3)$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
   (b) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer la matrice inverse de P.
   (c) Déterminer la matrice T de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
3. On considère la matrice N suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer N^2. Pour k un entier supérieur ou égal à 2, en déduire N^k .
   (b) Calculer $I + N$. Déterminer T^n en fonction de n et de N, puis de n uniquement.
   (c) Montrer que

$$P\ N\ P^{-1} = A - I \quad \text{et} \quad P\ N^2\ P^{-1} = A^2 - 2A + I.$$

   (d) Donner l'expression de A^n en fonction de n, I, A et A^2.